

Nachhilfestunde 1

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$$

*Zur Untersuchung einer
ganzzrationalen Funktion
mit Zusatzaufgaben*

**Niveau: Grundkurs Gymnasium
oder Fachoberschule**

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 42201

Stand 17. April 2025

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

VORWORT

In 19 Schritten wird die folgende Aufgabe gründlich erklärt. Einzelne Schritte werden ausführlich vorgerechnet. Es wird dabei großer Wert darauf gelegt, **wie** man die Teilaufgaben löst:

Abschnitte, die mit **GW** gekennzeichnet sind, enthalten **GrundWissen**.

Methodenwissen ist die Grundlage der Mathematik!

Hier die Aufgabenstellung:

- 1 - 3** Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$. Das Schaubild von f sei K .
Berechne die Nullstellen von f . Was bedeuten sie geometrisch?
Gib die Funktion in Linearfaktordarstellung an.
- 4** Bestimme das Symmetrieverhalten von K und begründe deine Entscheidung.
- 5, 6** Berechne Art und Lage der Extrempunkte von K
- 7** Bestimme die Wendepunkte des Schaubilds von f .
- 8, 9** Zeichne den Graph der Funktion in ein Koordinatensystem
- 10** Berechne die Gleichung der Wendetangente.
- 11, 12** Begründe, dass K keine parallele Tangente zur Wendetangente haben kann.
- 13, 14** $P(u | v)$ sei ein Punkt des Graphen K von f im 4. Feld.
Fällt man das Lot von P auf die x -Achse, entsteht der Lotfußpunkt Q .
Berechne den Inhalt des Dreiecks OPQ in Abhängigkeit von u .
- 15 - 17** Für welchen Wert von u nimmt der Inhalt A des Dreiecks OPQ einen Extremwert an?
Berechne die Art und die Größe des extremen Inhalts.
- 18, 19** K und die x -Achse begrenzen im 4. Feld eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

Auf der nächsten Seite beginnt der 1. Abschnitt unserer Lösung!

Versuche, möglichst viel allein herauszufinden!

1 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$.

HALLO!

Da taucht schon die erste Frage auf:

Warum nennt man f eine ganzrationale Funktion?

Du solltest dir diese Antwort merken:

Funktionen, die man auf die Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + \underbrace{a_1 x^1 + a_0 x^0}_{a_1 x + a_0}$

bringen kann, heißen **ganzrational**.

Unsere gegebene Funktion hat den **Grad 3**, weil die höchste Hochzahl (= Exponent) eben die 3 ist.

Man sollte dann auch in der Lage sein, die Koeffizienten zu identifizieren:

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$ kann man sehr ausführlich so schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + (-8) \cdot x + 0 \\ f(x) &= a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Dann kann man durch Vergleichen ablesen:

$$a_3 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = -8 \quad \text{und} \quad a_0 = 0$$

Das war Grundwissen.

Die erste Aufgabe für dich lautet:

Berechne die Nullstellen von f.

Dazu muss man wissen: Die **Nullstellen** sind die x-Zahlen, zu denen f den Funktionswert 0 liefert.

Die **Bedingung für Nullstellen** heißt daher: $f(x) = 0$

Schreibt man links den Funktionsterm auf, wird diese **Nullstellengleichung** zu: $\frac{1}{2}x^3 - 8x = 0$.

Achtung: Weil man die Nullstellen oft auch mit x_N bezeichnet, schreiben viele die Nullstellenbedingung so an:

$$f(x_N) = 0 \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{2}x_N^3 - 8x_N = 0$$

Dann erkennt man später beim Ansehen der Lösung sofort, dass 4 eine Nullstelle ist.

Versuche nun bitte alleine, die Nullstellen zu berechnen.

Im nächsten Abschnitt zeige ich dir meine Lösung.

⇒ 2

2 Die Berechnung der Nullstellen sollte etwa so aussehen:

Bedingung: $f(x_N) = 0$ d. h. $\frac{1}{2}x_N^3 - 8x_N = 0$.

Jetzt müssen wir erst einmal klären, wie man diese Gleichung löst.

Die drei folgenden Abschnitte sind mit **GW** gekennzeichnet.

Sie enthalten methodisches **GrundWissen** dazu.

GW Diese Gleichung hat eine Merkmal: Jeder Summand enthält ein x_N .

Also kann man x_N ausklammern: $(\frac{1}{2}x_N^2 - 8) \cdot x_N = 0$

GW Links steht jetzt ein sogenanntes **Nullprodukt**.

Das ist ein zweites wichtiges Merkmal, das zur Lösung führt!

Ein Produkt ist nur dann Null, wenn einer der Faktoren Null wird.

Wir haben zwei Faktoren $(\frac{1}{2}x_N^2 - 8)$ und x_N .

Ich beginne mit $x_N = 0$ Das ist die erste Nullstelle.

Dann haben wir noch $\frac{1}{2}x_N^2 - 8 = 0$

Daraus folgt $\frac{1}{2}x_N^2 = 8$ bzw. $x_N^2 = 16$.

GW Jetzt muss man wissen, wie man diese **reinquadratische Gleichung** löst:

$x_N^2 = 16$ hat zwei Ergebnisse: $x_N = 4$ und $x_N = -4$, kurz $x_N = \pm 4$

Auf die 4 kommt man, weil man das Quadrat „rückgängig machen“ muss, und das geschieht, indem man die Wurzel zieht: $\sqrt{16} = 4$. Dann darf man aber nicht vergessen, dass die Gleichung $x_N^2 = 16$ außer der 4 noch die negative Lösung -4 hat.

Nun machen wir die Probe: $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 8 \cdot 0 = 0$

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 8 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 64 - 32 = 32 - 32 = 0$$

$$f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^3 - 8 \cdot (-4) = \frac{1}{2} \cdot (-64) + 32 = -32 + 32 = 0$$

Das hat ja geklappt, denn zu allen drei Lösungen, also 0, 4 und -4 ist der Funktionswert Null.

Eine solche Probe muss man nicht unbedingt machen. Sie ist aber oft hilfreich.

Kannst du mir sagen, welche geometrische Bedeutung diese drei Nullstellen haben?

Im nächsten Abschnitt steht meine Antwort. $\Rightarrow$ **3**

3 Geometrische Bedeutung einer Nullstelle:

Dort wo die Funktion eine Nullstelle besitzt, schneidet der **Graph** der Funktion, also die zugehörige **Kurve** (man sagt auch **Schaubild** dazu), die x-Achse.

Der Graph K von f schneidet also die x-Achse in den Punkten $N_1(0 | 0)$, $N_2(4 | 0)$ und $N_3(-4 | 0)$.

GW Mit Hilfe der Nullstellen kann man den Funktionsterm in ein Produkt zerlegen.

Beispiel: Wenn eine Funktion f die drei einfachen Nullstellen x_1 , x_2 und x_3 hat,
Dann gilt: $f(x) = a_3 \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Begründung. Wenn man die rechte Seite Null setzt, hat man drei Faktoren, die Null werden können: Aus $(x - x_1) = 0$ folgt die Nullstelle x_1 , dann x_2 und x_3 .

Die Klammern nennt man **Linearfaktoren**.

Nun schreiben wir die Linearfaktoren der drei Nullstellen 0, 4 und -4 auf:

Zur Nullstelle $x = 0$ gehört der Faktor $(x - 0)$ also x .

Zur Nullstelle $x = 4$ gehört $(x - 4)$

Zur Nullstelle $x = -4$ gehört $(x + 4)$.

Die Linearfaktordarstellung von f ist daher $f(x) = k \cdot x \cdot (x - 4)(x + 4)$.

Was geschieht nun mit dem Faktor k? Unsere Funktion heißt doch $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$

Damit dieser Funktionsterm mit unserem Linearfaktorenprodukt übereinstimmt, muss man den „höchsten“ Koeffizienten, also $a_3 = \frac{1}{2}$ für das k verwenden.

Die Linearfaktordarstellung besteht also aus den drei Klammern, die zu den Nullstellen

gehören, und dem Koeffizienten (hier) a_3 . $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x - 4)(x + 4)$

Ist dir auch aufgefallen, dass man in den Klammern die Nullstelle stets von x subtrahiert???

Eine neue Aufgabe für dich:

Schreibe bitte auf, welches Symmetrieverhalten der Graph von f hat.

Vielleicht kannst du das auch noch begründen!

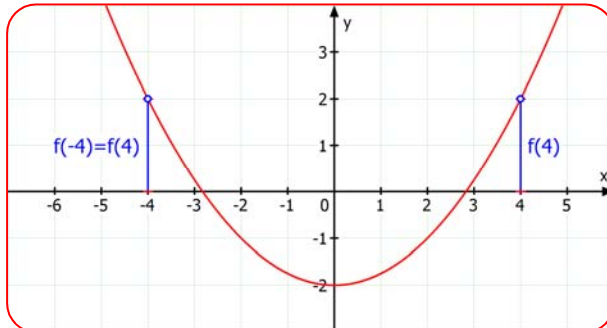
⇒ 4

4 Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zuerst denken wir über die übliche Untersuchungsmethode nach:

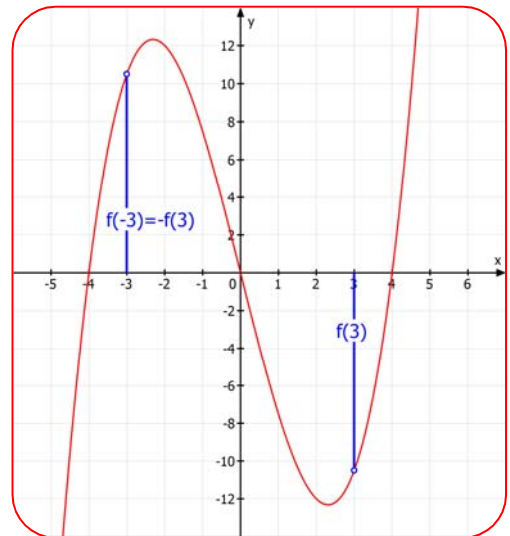
Man sucht eine Symmetrieart beim Graph einer ganzrationalen Funktion f , indem man

$f(-x)$ berechnet. Sieh bitte diese Abbildungen an:



Bei Symmetrie zur y -Achse hat man bei $x = -4$ denselben Funktionswert wie bei $x = 4$.

Erhält man also $f(-x) = f(x)$ wie in der linken Abbildung, dann ist die Kurve symmetrisch zur y -Achse.



Erhält man aber $f(-x) = -f(x)$ wie in der rechten Abbildung, dann ist K punktsymmetrisch zum Ursprung.

Wir überprüfen also die gegebene Funktion (rechts) mit dieser Methode:

$$\text{Es ist } f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x^3) - 8 \cdot (-x) = -\frac{1}{2}x^3 + 8x = -f(x)$$

Also ist unser Graph von f punktsymmetrisch zu O .

Es gibt einen Trick, der an dieser Stelle ohne Rechnung auskommt:

Im Falle der Achsensymmetrie soll doch $f(-x) = f(x)$ sein. Das klappt, wenn f nur gerade

Exponenten hat. Dagegen liegt Punktsymmetrie zu O vor, wenn f nur ungerade Exponenten hat, weil

z. B. $(-x)^3 = -x^3$ ist usw.

Man könnte die Punktsymmetrie bei unserer Aufgaben-Funktion also ohne Rechnung auch so begründen: K ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil die Variable x nur mit ungeraden Exponenten vorkommt (und das Absolutglied Null ist).

Was passiert aber bei einer Funktion mit geraden und ungeraden Exponenten wie $f(x) = x^2 - 3x + 4$?

Dann sollte man dazu schreiben: Hier ist mit dieser Methode keine Symmetrie erkennbar.

Das ist natürlich eine traurige Aussage, denn es gibt beliebig viele andere Symmetrien.

Doch sie erfordern schärfere Methoden und werden daher meistens nur in Leistungskursen behandelt.

5

Die nächste Teilaufgabe lautet:

Berechnen Sie Art und Lage der Extrempunkte von K .

GW

Die Berechnungsmethode erfordert 3 Schritte:

- (1) Die notwendige Bedingung muss erfüllt sein, d.h. $f'(x_E) = 0$.
- (2) Die zugehörige y -Koordinate ist $y_E = f(x_E)$.
- (3) Die hinreichende Bed. entscheidet über die Art des Extremums:

$$f''(x_E) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\ < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \end{cases}$$

Führe diese Berechnungen durch. Ich zeige dir meine Musterlösung im Abschnitt **6**.

6 Für die **Extremwertberechnung** benötigt man normalerweise 2 Ableitungen der Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8$$

$$f''(x) = 3x$$

Mit der **notwendigen Bedingung** $f'(x_E) = 0$ sucht man nach Punkten mit waagrechtter Tangente.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 8 = 0 \\ \frac{3}{2}x^2 &= 8 \quad | \cdot \frac{2}{3} \\ x^2 &= 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Es gibt zwei Lösungen:

$$x_E = \pm \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \pm 2,31$$

Dazu gehören die y-Koordinaten:

$$f\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) \approx -12,32$$

und wegen der Punktsymmetrie:

$$f\left(-\sqrt{\frac{16}{3}}\right) \approx +12,32$$

Mit der **hinreichenden Bedingung** untersucht man die Art des Extremwerts:

$$f''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = \sqrt{\frac{16}{3}} \cdot 3 > 0 \Rightarrow \text{Bei } x_{E2} = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ hat } f \text{ ein lokales Minimum.}$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{16}{3}} \cdot 3 < 0 \Rightarrow \text{Bei } x_{E3} = -\sqrt{\frac{16}{3}} \text{ hat } f \text{ ein lokales Maximum.}$$

Für die Kurve bedeutet das: K hat den lokalen Tiefpunkt $T(2,31 | -12,32)$
und den lokalen Hochpunkt $H(-2,31 | +12,32)$

Achte bitte darauf:

Man sollte zwischen Extremwerten und Extrempunkten unterscheiden:

f hat bei $x_{E2} = \sqrt{\frac{16}{3}}$ ein **lokales Minimum**. Das heißt: In einer Umgebung von dieser Stelle sind die Funktionswerte mindestens so groß wie $\approx -12,32$. Das bedeutet, dass der Graph von f dort einen Tiefpunkt hat. $-12,32$ ist ein Extremwert und $T(2,31 | -12,32)$ ist ein Extrempunkt.

Der Extremwert ist die y-Koordinate des Extrempunktes T, also des Tiefpunktes.

Und bei $x_{E3} = -\sqrt{\frac{16}{3}}$ hat f ein **lokales Maximum**. In einer Umgebung dieser Stelle sind die Funktionswerte höchstens so groß wie $\approx 12,32$. Der Graph hat dort einen Hochpunkt.

Merke: Dort wo f ein Minimum hat, besitzt der Graph einen Tiefpunkt
Dort wo f ein Maximum hat, besitzt der Graph einen Hochpunkt

Außerdem muss man wissen, dass man mit der Bedingung $f'(x) = 0$ nach Punkten sucht, in denen K eine **waagrechte Tangente** hat. In den Extrempunkten von ganzrationalen Funktionen bzw. deren Kurven hat also der Graph eine waagrechte Tangente.

Bestimme nun die Wendepunkte $\Rightarrow$ 7

7 Für Wendepunkte benötigt man noch eine dritte Ableitung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8$$

$$f''(x) = 3x$$

$$f'''(x) = 3$$

Mit der **notwendigen Bedingung** $f''(x_E) = 0$ sucht man nach Wendepunkten:

$$3x_W = 0 \Rightarrow x_W = 0$$

Mit der **hinreichenden Bedingung** bestätigt man, dass eine Wendestelle vorliegt:

$$f'''(0) \neq 0$$

Unsere gegebene Funktion macht es uns da leicht:

Wir erhalten $x_W = 0$ und die y-Koordinate des Wendepunkts ist $y_W = f(0) = 0$.

Ergebnis: $W(0 | 0)$.

8 **Zeichne nun den Graph von f in ein Koordinatensystem**

Dazu schreibt man die ermittelten Punkte auf:

Nullstellen: $N_1(0 | 0)$, $N_2(4 | 0)$ und $N_3(-4 | 0)$

Hochpunkt: $H(-2,31 | +12,32)$

Tiefpunkt: $T(2,31 | -12,32)$

Wendepunkt: $W(0 | 0)$.

Dann trägt man sie in ein Achsenkreuz ein und berechnet noch einige Zusatzpunkte.

Tipp: Damit das Achsenkreuz nicht zu hoch wird (siehe H und T) sollte man auf der y-Achse die Längeneinheit 2 cm nehmen.

Führe das bitte durch.

$\Rightarrow$ 9

9

Ich habe diesen Zusatzpunkt A berechnet:

$$f(1) = -7,5 \Rightarrow A(1 | -7,5)$$

Auf Grund der Punktsymmetrie kennt man dann noch sein

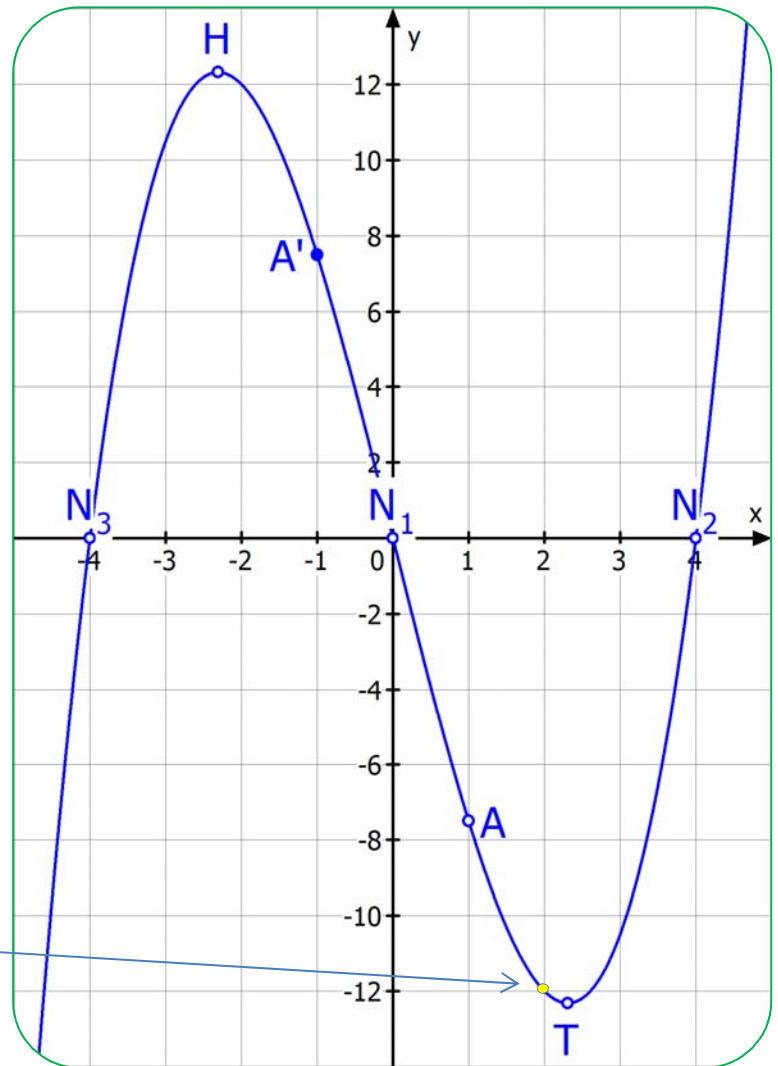
Spiegelbild: $A'(-1 | 7,5)$

Je mehr zusätzliche Punkte man kennt, desto „schöner“ wird die Kurve,

Wichtig ist vor allem, dass K in H und T nicht spitz verläuft sondern eine gute Rundung aufweist. Wer das nicht kann sollte noch einen Punkt bei $x = 2$ berechnen und dann auch auf $x = -2$ übertragen.

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12$$

$$\Rightarrow B(2 | -12) \text{ und } B'(-2 | 12)$$



Eine neue Aufgabe:

Berechne die Gleichung der Wendetangente.

Zuerst bereiten wir gemeinsam die Lösung vor:

Gegeben sei ein Punkt $P_1(x_1 | y_1)$ auf dem Graphen K von f mit $y = f(x)$.
Mit welcher Formel kann man die Gleichung der Tangente in P_1 an K aufstellen?

Schreibe das bitte auf.

$\Rightarrow$ 10

10 Eine der wichtigen **Grundaufgaben** lautet:

Gegeben ist ein Punkt $P_1(x_1 | y_1)$ auf dem Graphen K von f mit $y = f(x)$.
Mit welcher Formel kann man die Gleichung der Tangente in P_1 an K aufstellen?

Sie heißt **Punkt-Steigungs-Form**:

Da es sich um eine Tangente handeln soll, gilt

Damit sieht dann die Tangentengleichung so aus:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$m = f'(x_1)$$

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Bitte nicht mehr vergessen!

Nun die Details:

Der Wendepunkt liegt im Ursprung: $W(0 | 0)$:

Steigung von K in W: $m = f'(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 - 8 = -8$

Tangentengleichung: $y - 0 = -8 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -8x$

Ein wichtiger Hinweis. Da der Berührungspunkt der Tangente der Ursprung ist, benötigt man die Punkt-Steigungs-Form eigentlich nicht.

Denn **Ursprungsgeraden** haben die einfache Gleichung: $y = m \cdot x$,

was sofort zu $y = -8x$ führt.

Ein heißer Tipp!

11 **Deine nächste Aufgabe heißt nun:**

Begründe, dass der Graph von f keine parallele Tangente zur Wendetangente haben kann.

Nun muss man eine Methode zur Lösung finden. Die geht aber einfach:

Wenn eine Gerade parallel zur Wendetangente ist, muss sie dieselbe Steigung -8 haben.

Also kann man die Aufgabe so formulieren:

Zeige, dass K keine zweite Tangente mit der Steigung -8 hat.

Versuche das bitte selbst: $\Rightarrow$ 12

12 Die Steigung soll -8 sein, d.h. wir haben die Bedingung: $f'(x) = -8$.

Das bedeutet ausführlich:

$$\frac{3}{2}x^2 - 8 = -8 \quad | +8$$

$$\frac{3}{2}x^2 = 0$$

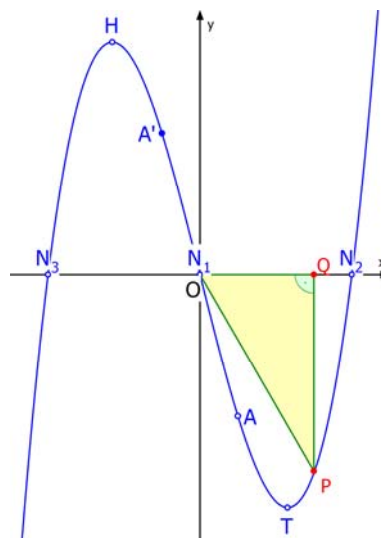
Erinnerst du dich: Ein Produkt ist nur dann Null, wenn ein Faktor Null ist.

Also haben wir $x^2 = 0$ also $x = 0$.

Die Berührstelle der Geraden mit der Steigung -8 kann also nur 0 sein.

Und dann ist der Berührungspunkt der Wendepunkt! Die Aufgabe ist gelöst.

13 Die folgende Abbildung enthält ein Dreieck OPQ.
O ist der Ursprung, $P(u | f(u))$ ein Kurvenpunkt von K im 4. Feld
und Q der Fußpunkt des Lotes von P auf die x-Achse.
Berechne in Abhängigkeit von u den Inhalt dieses Dreiecks.



Brauchst du einen Tipp?

Den Dreiecksinhalt berechnet man mit $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Nun musst du nur noch g und h herausfinden!

Es geht weiter in $\Rightarrow$ 14

14

Wir kennen alle die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

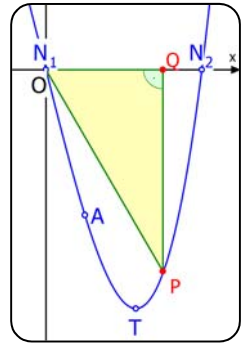
Man sollte Grundseite oder Höhe immer achsenparallel wählen,

etwa: Grundseite $g = \overline{OQ}$ und $h = \overline{PQ}$.

Nun brauchen wir Koordinaten: $O(0 | 0)$, P liegt auf dem Graphen von f und hat die noch unbekannte x -Koordinate u , also ist $P(u | f(u))$.

Fällt man von P das Lot auf die x -Achse, wird der Lotfußpunkt zu $Q(u | 0)$, denn er hat dieselbe x -Koordinate wie P , also u , und die y -Koordinate 0 , weil er auf der x -Achse liegt.

Daher wird: $g = u$ und $h = y_Q - y_P = 0 - f(u) = -f(u)$.

**GW**

Die Länge der vertikalen Strecke PQ wird so berechnet:

Oberer y-Wert minus unterer y-Wert, sonst wird die Länge negativ.

Beispiel: Wenn $P(3 | -8)$ ist, dann ist $Q(3 | 0)$ und die Strecke PQ hat die Länge $\overline{PQ} = 0 - (-8) = 8$

Nun können wir den Flächeninhalt allgemein berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (-f(u))$$

Ersetzt man noch $f(u)$, dann kommt man auf:

$$A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{2}u^3 + 8u\right) = -\frac{1}{4}u^4 + 4u^2$$

Dieser Inhalt hängt von u ab, ist also eine Flächeninhaltsfunktion, die man $A(u)$ nennt.

15

Fortsetzung der Aufgabe:

Lässt man P auf dem Kurvenbogen zwischen N_1 und N_2 wandern, also zwischen $u = 0$ und $u = 4$, dann ändert sich die gelbe Fläche.

Wir suchen die Stelle u_E , an der P und Q liegen müssen, damit der Dreiecksinhalt maximal groß ist.

Versuche bitte, diese sogenannte Extremwertaufgabe zu lösen.

Meine Lösung $\Rightarrow$ **16**

16

Also: Wir haben diese Flächeinhalts-Funktion

$$A(u) = -\frac{1}{4}u^4 + 4u^2$$

und suchen die Stelle u_E , so dass $A(u_E)$ das Maximum im Bereich $0 < u < 4$ ist.

Für eine Extremwertaufgabe brauchen wir zwei Ableitungen:

$$A'(u) = -u^3 + 8u$$

$$A''(u) = -3u^2 + 8$$

GW

Die notwendige Bedingung für die Extremstelle heißt

$$A'(u) = 0 \Rightarrow u = \dots$$

Die hinreichende Bedingung für ein Maximum lautet:

$$A''(u_E) < 0$$

Das Maximum ist dann

$$A_{\max} = A(u_E).$$

Aufgabe: **Führe das durch!**

$\Rightarrow$ **17**

17 Lösung der Extremwertaufgabe:

Wir wissen:

$$A(u) = -\frac{1}{4}u^4 + 4u^2$$

$$\text{für } 0 < u < 4$$

$$A'(u) = -u^3 + 8u$$

$$A''(u) = -3u^2 + 8$$

Notwendige Bedingung:

$$A'(u) = 0 \Leftrightarrow -u^3 + 8u = 0 \Leftrightarrow u(-u^2 + 8) = 0$$

Ein Faktor muss Null sein:

Da $u > 0$ sein muss, kann nur $(-u^2 + 8) = 0$.

Daraus folgt

$$u^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt{8} \\ u_2 = -\sqrt{8} \end{cases}$$

Die zweite Lösung

$u_2 = -\sqrt{8}$ ist negativ und scheidet daher aus.

Hinreichende Bedingung:

$$A''(\sqrt{8}) = -3 \cdot 8 + 8 < 0, \text{ d.h. } A \text{ hat dort ein relatives Maximum.}$$

Wert des Maximums:

$$A(\sqrt{8}) = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{8}^4 + 4 \cdot \sqrt{8}^2 = -\frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}_8 \cdot \underbrace{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}_8 + 4 \cdot 8 = -\frac{1}{4} \cdot 64 + 32 = -16 + 32 = 16 \text{ (FE).}$$

Diese Methode muss man wissen!

18 Aufgabe:

Als letztes berechnen wir noch den Inhalt der Fläche, die der Graph K und die x-Achse im 4. Feld umschließen.

Wenn Du das Berechnen von Flächen mit Integralen noch nicht gelernt hast, dann endet für dich hier diese Stunde!

Wenn dich dennoch interessiert, wie man das macht, dann geh bitte nach

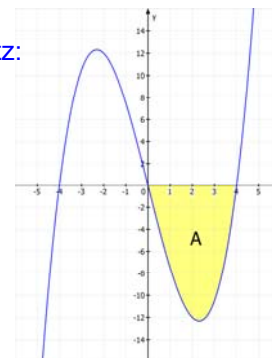
$\Rightarrow$ **19**

- 19** Die Fläche zwischen dem Schaubild K von f und der x-Achse liegt im 4. Feld unterhalb der x-Achse. Mit der Integralrechnung macht man daher diesen Ansatz:

$$A = \int_4^0 f(x) \cdot dx = \int_4^0 \left[\frac{1}{2}x^3 - 8x \right] dx$$

Die Besonderheit liegt hier darin, dass die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, daher muss man die Grenzen der Fläche vertauschen.

Das heißt man rechnet nicht „von 0 bis 4“ (wobei dann 0 unten und 4 oben stünde), sondern man rechnet „von 4 bis 0“. Das bewirkt eine Vorzeichenänderung im Ergebnis, so dass der Flächeninhalt eine positive Maßzahl erhält.



- GW** Nun muss man die **Stammfunktion** von f(x) berechnen. Diese entsteht durch „Aufleiten“, was der Umkehrung des Ableitens entspricht:

Eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$ ist
$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - 8 \cdot \frac{x^2}{2}$$

Dabei wird so gerechnet:

1. Konstante Faktoren bleiben stehen. Das sind $\frac{1}{2}$ und 8
2. Die x-Potenz wird um 1 erhöht, und zugleich dividiert man durch den erhöhten Exponenten:

Aus x^3 wird also $\frac{x^4}{4}$, und aus x wird $\frac{x^2}{2}$

Dann vereinfacht man noch: $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - 4x^2$

In manchen Fällen muss man noch + C dazu schreiben, jedoch nicht bei der Flächenberechnung.

Nun kann man die Flächenberechnung wie folgt fortsetzen:

$$A = \int_4^0 f(x) \cdot dx = \int_4^0 \left[\frac{1}{2}x^3 - 8x \right] dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - 4x^2 \right]_4^0$$

Man kann dies so interpretieren: Das Integralzeichen ist ein Rechenbefehl: „Berechne die Stammfunktion zu f“. Diese schreibt man dann in eckige Klammern auf und fügt die Grenzen noch an. Das dx schließt das Integral zu f ab.

Als nächstes muss man die Grenzen einsetzen und dann beide Ergebnisse subtrahieren.

Wenn man das formal aufschreibt, sieht das so aus:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = \left[F(x) \right]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) = \text{Ergebnis}$$

das sieht bei uns dann so aus:
$$A = \dots = F(x_2) - F(x_1) = \left[\frac{1}{8} \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{1}{8} \cdot 4^4 - 4 \cdot 4^2 \right]$$

Zu Ende rechnen:
$$= [0] - \left[\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{64} \right] = 64 - 32 = 32 \text{ (FE)}$$

Ich schreibe die ganze Flächenberechnung noch einmal in etwas verkürzter Form auf:

$$A = \int_4^0 \left[\frac{1}{2}x^3 - 8x \right] dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - 4x^2 \right]_4^0 = \left[\frac{1}{8} \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{1}{8} \cdot 4^4 - 4 \cdot 4^2 \right] = 64 - 32 = 32$$

Damit sind wir heute am Ende angekommen!

Danke für die Mitarbeit und viel Erfolg!

CIAO !